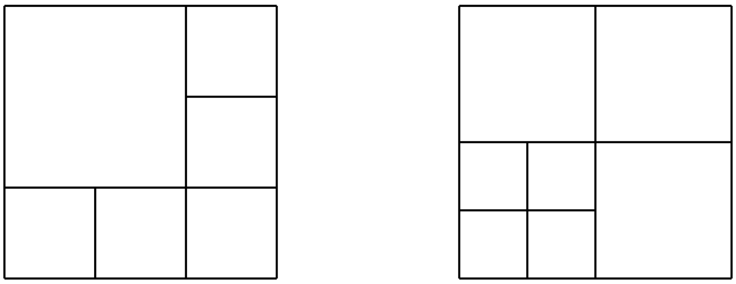
ϕ-room-challenge

Juni 2019

Problem 4
Daniela hat untersucht, wie sie ein Quadrat in kleinere Quadrate zerlegen kann. In der Figur ist zu sehen, welche Zerlegung in 6 und in 7 Quadrate sie dabei gefunden hat.



6 Quadrate **7 Quadrate**

Nun untersucht sie in ähnlicher Weise ein gleichseitiges Dreieck und überlegt, wie sie dieses in lauter kleinere gleichseitige Dreiecke zerlegen kann, wobei die kleineren Dreiecke auch verschieden groß sein dürfen.

a) Finden Sie je eine Zerlegung in sechs und in sieben gleichseitige Dreiecke. Fertigen Sie Skizzen an.

b) Beschreiben Sie alle Zahlen $n \in \mathbb{N}$, für die eine Zerlegung in n gleichseitige Dreiecke möglich ist.

c) Beschreiben Sie ebenfalls alle Zahlen $n \in \mathbb{N}$, für die eine Zerlegung in n gleichseitige Dreiecke nicht möglich ist und begründen Sie dies.

Solution 4
Die möglichen Zerlegungsfiguren werden hier nur verbal beschrieben, nicht aber skizziert.

a) Mögliche Lösung: Siehe Beschreibung in b).

b) Zerlegungen in gleichseitige Dreiecke sind möglich für die unendlich vielen natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N} \setminus \{2, 3, 5\}$.

- $n = 1$: trivial (sofern überhaupt von einer Zerlegung gesprochen werden darf).
- $n = 4$ und $n = 7$: Durch Einzeichnen des Dreiecks mit Ecken auf den Seitenmittelpunkten des großen Dreiecks entstehen vier (kongruente) gleichseitige Teildreiecke. Wird dieses mittlere Dreieck nochmals in analoger Weise in vier Teildreiecke zerlegt, so wächst die Anzahl der Teildreiecke auf insgesamt sieben an.
- $n = 6$: Eine Seite wird gedrittelt und über den drei Abschnitten je ein gleichseitiges Dreieck nach innen errichtet. Werden die entstehenden dritten Ecken verbunden, so ergibt sich eine Zerlegung in sechs (nicht kongruente) Teildreiecke.
- $n = 8$: Eine Seite wird geviertelt und über den vier Abschnitten je ein gleichseitiges Dreieck nach innen errichtet. Werden die entstehenden dritten Ecken wiederum verbunden, so ergibt sich eine Zerlegung in acht Teildreiecke; sieben entlang der viergeteilten Seite und ein größeres im Innenwinkelgebiet der gegenüberliegenden Ecke des Ausgangsdreiecks.
- Wird jetzt in den Fällen mit $n = 6$, 7, 8 jeweils genau eines der Teildreiecke durch Einzeichnen des Mittendreiecks in vier Dreiecke zerlegt, so wächst die Anzahl der Teildreiecke jeweils um 3 und wir erhalten eine Zerlegungsmöglichkeit für $n = 9$, 10, 11; und in einem nächsten analogen Folgeschritt mögliche Dreieckszerlegungen für $n = 12$, 13, 14 – und so ad infinitum.

c) Keine Zerlegungen existieren für $n \in \{2, 3, 5\}$. Wir stellen fest, dass jeder Eckpunkt des Ursprungsdreiecks zum Eckpunkt eines kleinen Dreiecks gehört. Wenn ein kleines Dreieck aber 2 von diesen Eckpunkten belegt, ist es das Ursprungsdreieck. Mit nur 2 Dreiecken können wir dieses deshalb nicht bilden.
Gehören die drei Eckpunkte des Ursprungsdreieck zu 3 jeweils verschiedenen Dreiecken, bleibt in der Mitte aber eine Restfläche übrig, welche durchaus ein gleichseitiges Dreieck sein kann. Dadurch wird das Ursprungsdreieck aber in 4 Flächen zerlegt, wodurch keine Lösung mit $n = 3$ möglich ist.
Um das Ursprungsdreieck in $n = 5$ gleichseitige Dreiecke zu zerlegen, müssen wir – wie erwähnt – sicher 3 Dreiecke in den 3 Ecken platzieren. Die Restfläche kann nach obigen Ausführungen allerdings nur ein 3-, 4-, 5- oder 6-Eck sein. Gleichzeitig muss diese Restfläche in 2 gleichseitige Dreiecken zerlegbar sein. Mit 2 Dreiecken können wir jedoch nur ein Viereck zerlegen. In diesem Fall ist die Restfläche jedoch ein Trapez mit Innenwinkeln $60°, 60°, 120°, 120°$, und zwar in dieser Reihenfolge. In die beiden Trapezecken mit den 60°-Winkeln müssen wir aber wieder 2 gleichseitige Dreiecke setzen. Dabei bleibt wieder eine Restfläche übrig, so dass eine Zerlegung in 5 gleichseitige Dreiecke nicht möglich ist.