ϕ-room-challenge

Oktober 2019

Problem 5
In einer Zauberschule gibt es 2013 Schließfächer, die von 1 bis 2013 durchnummeriert sind. Im Moment sind alle Schließfächer geschlossen. Ein Zauberlehrling übt für eine Prüfung einen Zauberspruch zum Öffnen und Schließen einer Schließfachtür. Allerdings klappt das nicht so richtig: Immer wenn er den Zustand eines Schließfaches ändert, ändern sich auch die Zustände aller Fächer, deren Nummern ein Vielfaches des verzauberten Schließfaches sind (geschlossene Türen öffnen sich, geöffnete schließen sich). Er beginnt mit dem Schließfach mit der Nummer 1, setzt fort mit der Nummer 2, 3, usw. bis hin zum letzten Schließfach mit der Nummer 2013.
Überprüfen Sie für folgende Schließfachnummern, ob am Ende die Tür des Schließfaches offen oder geschlossen ist:

a) 1024

b) 481

c) 1225

Finden Sie eine allgemeine Regel, wie entschieden werden kann, ob ein Schließfach am Ende offen oder geschlossen ist.

Solution 5
Der Zustand eines Faches n wird genau dann durch die “Anwendung des Zaubers” auf das Fach d geändert, wenn d ein Teiler von n ist. Um herauszufinden, ob ein Fach n am Schluss abgeschlossen ist oder nicht, müssen wir also die Anzahl der Teiler von n berechnen: Genau dann, wenn diese ungerade ist, ist das Fach geöffnet. Eine Zahl n hat genau dann eine ungerade Anzahl von Teilern, wenn sie eine Quadratzahl ist: Für jeden Teiler d ist auch n/d ein Teiler, und nur falls $d = n/d$ erhalten wir eine ungerade Anzahl Teiler.

a) $n = 1024 = 32^2$ ist eine Quadratzahl, also ist das Fach geöffnet.

b) $n = 481 = 13 \cdot 37$ ist keine Quadratzahl, also ist das Fach geschlossen.

c) $n = 1225 = 5^2 \cdot 7^2 = 35^2$ ist eine Quadratzahl, also ist das Fach geöffnet.