ϕ-room-challenge

November 2019

Problem 6
Vor Beginn eines Zahlenspiels werden zwei Würfel geworfen; die Augensumme sei n. Das Spiel besteht darin, dass zwei Spieler A und B abwechselnd irgendeine der Ziffern von 0 bis 9 in ein freies Feld der unten abgebildeten Tafel eintragen. Dabei dürfen verschiedene Felder durchaus mit derselben Ziffer belegt werden, jede Ziffer darf also mehrmals verwendet werden.

A beginnt das Spiel und schreibt seine erste Ziffer in eines der sechs Felder; dann ist B an der Reihe. Sobald Spieler B eine Ziffer ins letzte noch freie Feld eingetragen hat, werden die aneinandergereihten Ziffern als eine Zahl z gelesen, die auch mit einer oder mehreren Nullen beginnen kann. Spieler B hat das Spiel gewonnen, wenn z durch die vor dem Spiel erwürfelte Augensumme n teilbar ist; anderenfalls gewinnt A.

a) Bei welchen Augensummen n kann Spieler B durch geschicktes Spielen seinen Sieg sicherstellen?

b) Bei welchen Augensummen n kann Spieler A durch geschicktes Spielen seinen Sieg sicherstellen?

Beschreiben Sie in beiden Fällen, wie die Spieler vorgehen müssen, um ihren Sieg sicherzustellen.

Solution 6
Günstige Zahlen für Spieler B sind $n \in \{3, 7, 9, 11\}$,
die restlichen Zahlen ($n \in \{2, 4, 5, 6, 8, 10, 12\}$) hingegen sind keine günstigen für B.

a) Gewinnstrategie von B für $n \in \{3, 7, 9, 11\}$:

- Für $n = 3$ oder $n = 9$ können wir das Quersummenkriterium verwenden. Eine Gewinnstrategie für Spieler B ist es darauf zu achten, dass die Quersumme der entstehenden Zahl stets durch 3 respektive 9 teilbar ist. Eine konkrete Umsetzung wäre: Notiert Spieler A die Ziffer x, so reagiert B darauf, in dem er die Ziffer $(9 - x)$ in ein leeres Feld setzt; denn dadurch kann B erreichen, dass die entstehende 6-stellige Zahl z die Quersumme 27 hat, die sowohl durch 3 als auch durch 9 teilbar ist, also ist auch z selbst durch 3 respektive 9 teilbar.
- Für $n = 7$ oder $n = 11$ muss Spieler B stets darauf achten, dass die beiden Ziffern übereinstimmen, die 3 Felder auseinander liegen; denn dann ist die entstehende 6-stellige Zahl immer durch 1001 teilbar, also auch durch 7 und 11. Für $n = 11$ kann Spieler B über die alternierende Quersumme auf eine weitere Weise den Sieg erzwingen.

b) Gewinnstrategie von A für $n \in \{2, 4, 5, 6, 8, 10, 12\}$:

- Wenn n gerade ist, kann Spieler A als Erstes eine <u>un</u>gerade Ziffer ins äußerste Feld rechts (Einerstelle) setzen.
- Wenn $n = 5$ ist, kann Spieler A gleich zu Beginn <u>keine</u> 0 oder 5 ins äußerste Feld rechts setzen.